



Valsts administrācijas
skola

Datu analīze – 2.līmenis

Biruta Sloka, Ieva Brence
2. nodarbība

Mācības finansētas no Eiropas Sociālā fonda projektiem

Nr.3.4.2.0/15/I/001 "Valsts pārvaldes cilvēkresursu profesionālā pilnveide labāka regulējuma izstrādē mazo un vidējo komersantu atbalsta jomā" un

Nr.3.4.2.0/15/I/002 "Valsts pārvaldes cilvēkresursu profesionālā pilnveide korupcijas novēršanas un ēnu ekonomikas mazināšanas jomā"

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA

Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē



Valsts administrācijas
skola

Mācību plānojums, 2.nodarbība

9.00-11.00	1.daļa, Ievads varbūtību teorijā Elementārnotikums un notikums; Varbūtības īpašības; Varbūtības aprēķināšana
11.00-11.15	Kafijas pauze
11.15-12.15	2.daļa, Gadījuma lielums un statistiskais sadalījums Diskrētie un nepārtrauktie gadījuma lielumi; Sadalījuma funkcija; Blīvuma funkcija; Statistiskie sadalījumi
12.15-13.00	Pārtraukums
13.00-14.30	3.daļa, Normālais sadalījums; Stjudenta jeb t- sadalījums; Gadījuma skaitļu ģenerēšana; Normālā sadalījuma praktiska izmantošana – aprēķini ar dažādām tabulām
14.30-14.45	Kafijas pauze
14.45-16.15	4.daļa, Normālā sadalījuma praktiska izmantošana – aprēķini ar dažādām tabulām



Ievads varbūtību teorijā

***) *Elementārnotikums un notikums***

Ar *notikumu* varbūtību teorijā saprot jebkuru faktu, kuru var konstatēt novērojuma vai izmēģinājuma rezultātā

Par *novērojumu* vai *izmēģinājumu* sauc zināmu apstākļu realizāciju, kā rezultātā var iestāties notikums. *Izmēģinājums* nozīmē aktīvu interesējošā apstākļu kompleksa radīšanu

Novērojuma gaitā novērotājs pats šo apstākļu kompleksu nerada. To rada vai nu dabas spēki vai citi cilvēki

Par *droši sagaidāmu* sauc notikumu, kas iestājas vienmēr, ja ir izveidojusies zināma apstākļu kopa



Valsts administrācijas
skola

Ievads varbūtību teorijā

Par *neiespējamu* sauc notikumu, kurš noteikti neiestājas, ja ir izveidojusies zināma apstākļu kopa

Par *gadījumnotikumu* sauc notikumu, kurš, pastāvot zināmai apstākļu kopai, var notikt un var arī nenotikt

Notikumus sauc par *savienojamiem*, ja tie var notikt kopēji viena novērojuma vai izmēģinājuma rezultātā

Piemēram, uzmetot spēļu kauliņu, uzmetot ciparu četri (viens fakts jeb notikums) un pārskaitlis (otrs fakts jeb notikums). Šie notikumi ir savstarpēji savienojami



Valsts administrācijas
skola

Ievads varbūtību teorijā

Notikumus sauc par ***nesavienojamiem***, ja tie nevar notikt viena novērojuma vai izmēģinājuma rezultātā. Ja ir zināms vai var iedomāties visus notikumus, no kuriem vismaz vienam ir jārodas izmēģinājuma rezultātā, tad tie veido ***pilnu notikumu kopu***

Piemēram, metot monētu, uzmet ciparu un nezmest ciparu vai arī, metot spēļu kauliņu, uzmet ciparu 4 un neuzmet ciparu 4 veido pilnu notikumu kopu

Ja pilnu notikumu kopu veido tikai divi nesavienojami notikumi, tad tos sauc par ***savstarpēji pretējiem, jeb alternatīviem***

Alternatīvs skatījums ir iespējams arī tad, ja pilnu kopu sākotnēji veido vairāki notikumi. Varbūtību teorijā notikumus parasti apzīmē ar lielajiem latīņu burtiem A, B, C utt. Tiem pretējos notikumus apzīmē ar tādiem pat burtiem, virs tiem liekot svītriņu



Valsts administrācijas
skola

Ievads varbūtību teorijā

Ir vairākas varbūtības definīcijas

Klasiskā varbūtība (sauc arī par *aprioro* varbūtību, jo to aprēķina pirms novērojuma vai izmēģinājuma uzsākšanas): *iespēju* (potenciālu notikumu) saskaitīšanu, iespēju skaitu pretstatot visam vienīgi iespējamo notikumu skaitam

Par notikumam ***labvēlīgām iespējām*** sauc tās iespējās, kas nodrošina šī notikuma notikšanu



Ievads varbūtību teorijā

Varbūtību parasti apzīmē ar burtu P, aiz tā iekavās liekot gadījumnotikuma simbolu

Notikums A – metot monētu, uzmet ciparu (1 no 2)

$$P(A) = \frac{M(A)}{N(A)} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Notikums B – metot spēļu kauliņu, uzmet ciparu 4 (1 no 6)

$$P(B) = \frac{M(B)}{N(B)} = \frac{1}{6}$$

Notikums $\bar{A}$ – metot monētu, neuzmet ciparu (1 no 2)

$$P(\bar{A}) = \frac{M(\bar{A})}{N(\bar{A})} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Notikums $\bar{B}$ – metot spēļu kauliņu, neuzmet ciparu 4 (1 no 6)

$$P(\bar{B}) = \frac{M(\bar{B})}{N(\bar{B})} = \frac{1}{6}$$



Valsts administrācijas
skola

Ievads varbūtību teorijā

Statistiskā varbūtība izmanto relatīvo biežumu. Par notikuma A relatīvo biežumu sauc novērojumu skaitu, kad A novērots, attiecību pret visu novērojumu skaitu. Relatīvo biežumu parasti apzīmē ar burtu W. Ja ir izdarīti n novērojumi un notikums ir reģistrēts m reizes, tad

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Piemēram, metot monētu 100 reizes, cipars uzkrīt 51 reizi, tad cipara uzkrišanas relatīvais biežums ir

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{51}{100} = 0,51;$$

Piemēram, metot monētu 1000 reizes, cipars uzkrīt 499 reizes, tad cipara uzkrišanas relatīvais biežums ir

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{499}{1000} = 0,499;$$

Piemēram, metot monētu 10000 reizes, cipars uzkrīt 5001 reizi, tad cipara uzkrišanas relatīvais biežums ir

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{5001}{10000} = 0,5001;$$

Piemēram, metot monētu 100000 reizes, cipars uzkrīt 49998 reizes, tad cipara uzkrišanas relatīvais biežums ir

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{4998}{10000} = 0,49998;$$



Valsts administrācijas
skola

Ievads varbūtību teorijā

Sstatistiskā varbūtības definīcija balstās uz relatīvo biežumu atsevišķos izmēģinājumos vai novērojumos, to sauc par notikuma ***A statistisko varbūtību***.

Ir novērots, ka šīs svarstības ir jo mazākas, jo lielākas ir novērojumu sērijas. Tādēļ ***statistisko varbūtību*** definē kā **relatīvo biežumu robežu, kad novērojumu skaits palielinās:**

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$



Ievads varbūtību teorijā

Ģeometriskā varbūtība jeb varbūtības ģeometriskā interpretācija ir nepieciešama tad, ja pilna notikumu kopa sastāv no neierobežoti daudziem elementāriem notikumiem

Tad katra atsevišķa elementāra notikuma varbūtība ir tik niecīga, ka to kā robežu var uzlūkot par nulli

Tad interesējamies par kādas notikumu apakškopas varbūtību, kuru kaut kādā veidā var izdalīt no pilnās notikumu kopas

$$P(Q) = \frac{S_Q}{S}$$



Valsts administrācijas
skola

Varbūtības īpašības

1. *Droši sagaidāma notikuma varbūtība ir viens.*

Ja labvēlīgo iespēju skaits sakrīt ar visu iespēju skaitu, tad $M = N$ un no klasiskās varbūtības definīcijas izriet, ka to dalījums ir viens.

2. *Neiespējama notikuma varbūtība ir nulle*

Ja izdarot novērojumu, kādam notikumam nav labvēlīgu iespēju, tad $M = 0$ un varbūtība ir nulle

3. *Gadījumnotikuma varbūtība ir skaitlis, lielāks par nulli un mazāks par vienu*

Ja notikums ir gadījumnotikums, tad tam labvēlīgo iespēju skaits ir mazāks par visu iespēju skaitu, tātad $M < N$, no kā seko, ka

$$0 < P(A) < 1$$

Visu iepriekšminēto apvienojot var pierakstīt, ka varbūtība ir robežās no nulles līdz vienam:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$



Valsts administrācijas
skola

Bernulli formula

Ja notikuma iestāšanās varbūtība ir nemainīga un atšķirīga no 0 un 1, kā arī jāaprēķina varbūtība, ka no n izmēģinājumiem, notikums A iestāsies tieši m reizes, iegūst ***Bernulli*** formulu

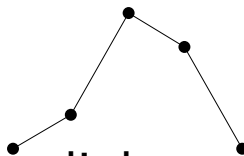
$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m q^{n-m}$$



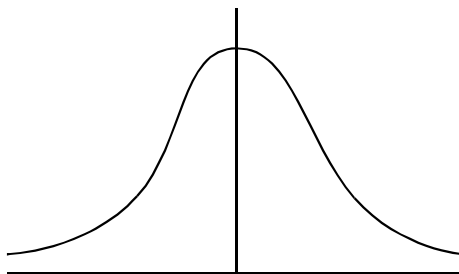
Valsts administrācijas
skola

Gadījuma lieluma sadalījums

Diskrēta gadījuma lieluma sadalījuma attēls ir histogramma vai poligons. Šādi var attēlot arī nepārtraukta gadījumlieluma sadalījumu, uz horizontālās ass atliekot intervālus, bet uz vertikālās - to biežumus



Nepārtraukta gadījumlieluma teorētiskais sadalījums veido laidenu līkni. Var iedomāties, ka intervālu lielums šeit ir neierobežoti mazs. Ja šādu līkni uzdod ar formulu, to sauc par sadalījuma blīvuma funkciju jeb sadalījuma diferenciālo funkciju





Valsts administrācijas
skola

Gadījuma lieluma sadalījums

Konkrētās sadalījuma funkcijas var pierakstīt nestandartizētā un standartizēta formā. Nestandartizētā formā funkcijas arguments x atspoguļo novērojuma mērvienības (eiro, metri, kilogrami), bet funkcija - absolūtos vai relatīvos biežumus. Standartizētā formā funkcijas argumentu standartizē:

$$t = \frac{x - \bar{x}}{s_x}$$



Valsts administrācijas
skola

Gadījuma lieluma raksturotāji

Diskrētām gadījumlielumam **matemātisko cerību** (aritmētisko vidējo) aprēķina

$$\mu = E(x) = M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

kur x_i - gadījumlieluma vērtības

p_i - šo vērtību varbūtības

$f(x)$ - gadījumlieluma diskrētā sadalījuma funkcija

Nepārtraukta gadījumlieluma **matemātiskā cerība**

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$



Gadījuma lieluma raksturotāji

Diskrēta gadījumlieluma **dispersija**:

$$\sigma^2 = D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i$$

kur x_i - gadījumlieluma vērtības,

p_i - šo vērtību varbūtības

μ - matemātiskā cerība

momentu metode

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2$$



Valsts administrācijas
skola

Gadījuma lieluma raksturotāji

Nepārtraukta gadījumlieluma **dispersija**:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu)^2 f(x) dx$$

kur x_i - gadījumlieluma vērtības,

$f(x)$ - gadījumlieluma diskrētā sadalījuma funkcija

μ - matemātiskā cerība

momentu metode

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$



Binominālais sadalījums

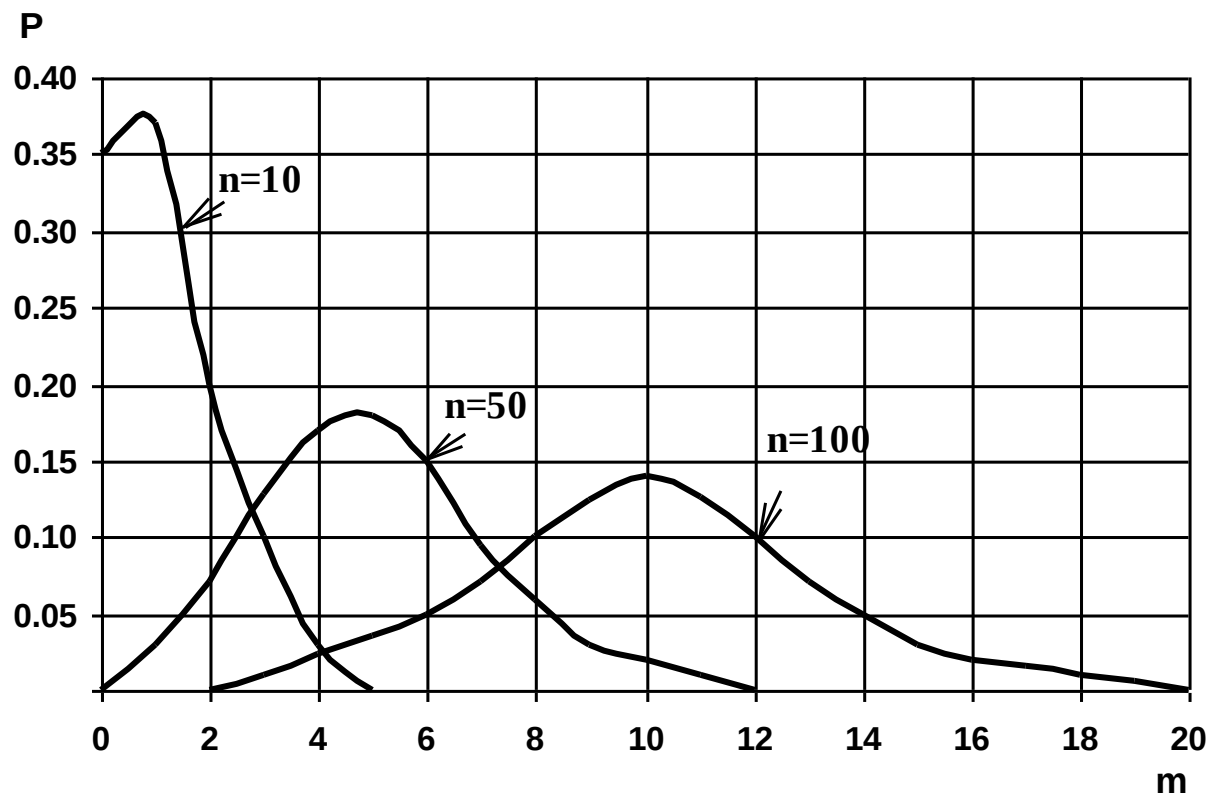
Binominālo sadalījumu - ja ir jānovērtē *atkārtotu* novērojumu varbūtības un katrā novērojumā notikuma varbūtība ir nemainīga un atšķirīga no 0 un 1, visas iespējas, ka notikums iestāsies 0; 1; ..., m;...;.. n reizes Varbūtību, ka notikums notiks m reizes no n izmēģinājumiem, var aprēķināt ar *Bernulli* formulu

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m q^{n-m}$$



Valsts administrācijas
skola

Binominālā sadalījuma poligoni





Valsts administrācijas
skola

Binomiālā sadalījuma raksturotāji

Binomiālā sadalījuma matemātisko cerība

$$\mu = np$$

Binomiālā sadalījumā dispersija

$$\sigma^2 = npq$$

standartnovirze

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

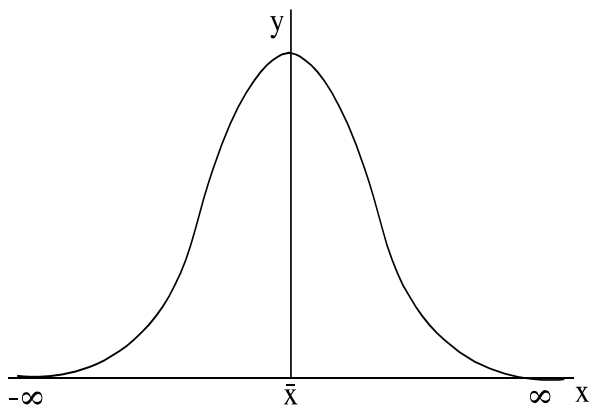


Valsts administrācijas
skola

Normālā sadalījuma funkcijas vispārējā veidā un to līknes

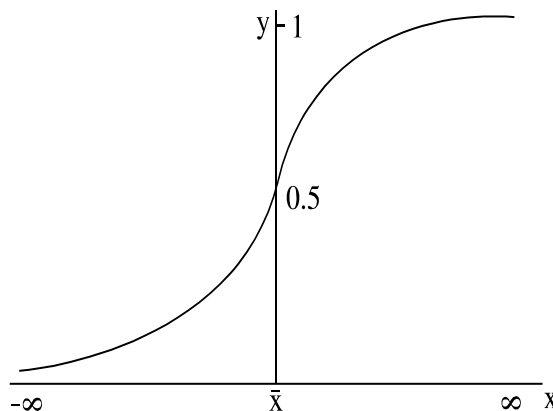
Diferenciālā funkcija

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}$$



Integrālā funkcija

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{s} \int e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}$$





Valsts administrācijas
skola

Normālā sadalījuma īpašības

1 Mainoties aritmētiskā vidējai vērtībai, normālā sadalījuma līkne pārvietojas x ass virzienā, saglabājot sākotnējo formu. Ja aritmētiskais vidējais ir lielāks, līkne atrodas vairāk pa labi, lielāko skaitļu apgabalā, un otrādi.

Normālā sadalījuma līknes ar dažādām vidējo lielumu un vienādām standartnoviržu vērtībām ; $s_1=s_2=s_3$

2. Mainoties standartnovirzei, līknes novietojums uz x ass nemainās, bet mainās tās forma. Pieaugot standartnovirzei s , samazinās līknes maksimālā ordināta, līkne it kā pieplok abscisu asij. Samazinoties standartnovirzei, līknes maksimālā ordināta pieaug, līkne kļūst stāvāka

3. No iepriekšējā nevar secināt, ka, mainot standartnovirzi, mainās līknes ekscess. Ja ekscesu mēri ar četurtās kārtas standartizēto momentu , tas visu laiku paliek skaitlis 3. Šo lielumu pieņem par ekscesa standartu. Tātad šāds ekscesa rādītājs raksturo līknes smailumu ar noteikumu, ka variācija (standartnovirze) ir fiksēta.

4. Normālā sadalījuma diferencialās funkcijas līkne ir simetriska pret aritmētisko vidējo. Šī sadalījuma asimetrijas koeficients - trešās kārtas standartizētais moments ir nulle.

5. Līknes virsotne (maksimums) atbilst gadījumlieluma vidējai vērtībai (aritmētiskam vidējam). Ar šo lielumu sakrīt arī sadalījuma moda un mediāna. Tā kā sadalījums ir simetrisks pret vidējo, puse no novērojumiem ir mazāki par vidējo, puse - lielāki



Valsts administrācijas
skola

Normālā sadalījuma īpašības

**Izmanto normēto normālo sadalījumu,
kur aritmētiskais vidējais ir 0 un
standartnovirze 1 $N(0;1)$**

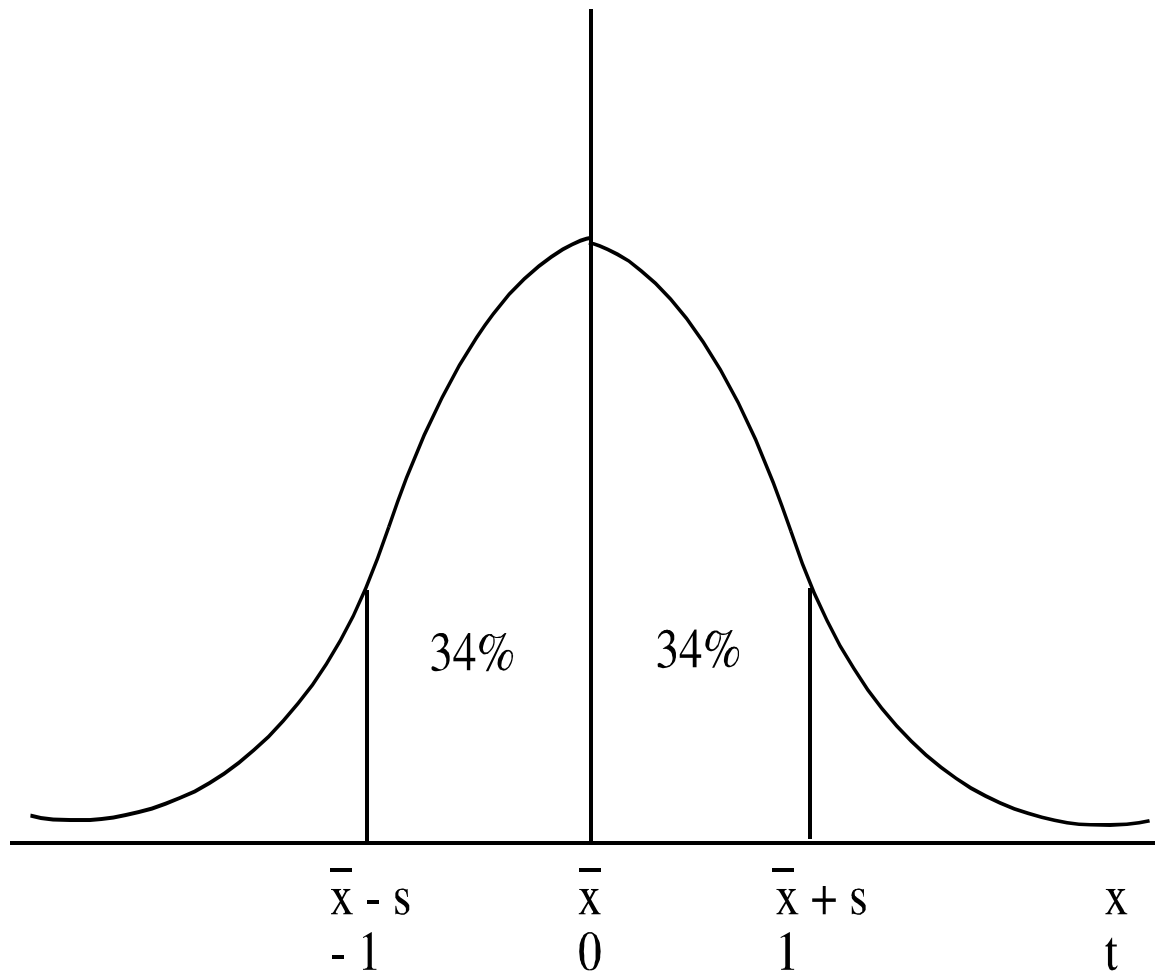
Standartizēto vērtību aprēķina

$$t = \frac{x - \bar{x}}{s}$$



Valsts administrācijas
skola

Normālā sadalījuma īpašības





Valsts administrācijas
skola

Normālā sadalījuma praktiska izmantošana – aprēķini ar dažādām tabulām

Statistika galvenokārt izmantojama analīzei
un pamatotai lēmumu pieņemšanai
CSP -

<http://www.csb.gov.lv/>

Latvijas Banka – Mājsaimniecību finanšu un
patēriņa statistika

[https://www.bank.lv/statistika/dati-
statistika/mfps/raditaji](https://www.bank.lv/statistika/dati-statistika/mfps/raditaji)

Eiropas Centrālā Banka

[https://www.ecb.europa.eu/pub/economic-
research/research-
networks/html/researcher_hfcn.en.html](https://www.ecb.europa.eu/pub/economic-research/research-networks/html/researcher_hfcn.en.html)



Valsts administrācijas
skola

Paldies par Jūsu uzmanību!

{Kontaktinformācija – Biruta Sloka, e-pasts Biruta.Sloka@lu.lv; 29244966}

{Kontaktinformācija – Ieva Brence, e-pasts Ieva.Brence@riseba.lv; 26363506}

Mācības finansētas no Eiropas Sociālā fonda projektiem

Nr.3.4.2.0/15/I/001 "Valsts pārvaldes cilvēkresursu profesionālā pilnveide labāka regulējuma izstrādē mazo un vidējo komersantu atbalsta jomā" un

Nr.3.4.2.0/15/I/002 "Valsts pārvaldes cilvēkresursu profesionālā pilnveide korupcijas novēršanas un ēnu ekonomikas mazināšanas jomā"

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA

Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē